MATHEMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

Option "Mathématiques"

PROBLEME

AVERTISSEMENT. — *Il sera tenu le plus grand compte dans la correction de l'épreuve du caractère précis et complet des démonstrations, tout particulièrement lorsque le résultat à obtenir est indiqué dans l'énoncé.*

NOTATIONS

Soit a et b deux nombres réels avec $a < b$.

On désigne par $C[a, b]$ l'espace vectoriel réel pour les lois usuelles des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

Pour n entier naturel, e_n désigne la fonction $t \longmapsto t^n$ sur $[a, b]$.

Pour x fixé dans $[a, b]$, β_x désigne la fonction $t \longmapsto |t - x|$ sur $[a, b]$.

Si f et g sont dans $C[a, b]$, $|f|$ désigne la fonction $t \longmapsto |f(t)|$ et fg la fonction $t \longmapsto f(t) \cdot g(t)$.

Enfin on note $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$.

Les parties III *et* IV *utilisent les résultats des parties* I *et* II *mais sont mutuellement indépendantes.*

I

Pour une fonction f de $C[0, 1]$, on définit une fonction ω_f sur $[0, 1]$ par :

$$0 \leqslant t \leqslant 1, \qquad \omega_f(t) = \sup \{ |f(x) - f(y)| \,/\, x, y \in [0, 1], \ |x - y| \leqslant t \}.$$

1° *a*. Montrer que la fonction ω_f est une fonction continue et croissante sur $[0, 1]$ et vérifie $\omega_f(0) = 0$.

b. Pour $(t_1, t_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$ avec $t_1 + t_2 \leqslant 1$, montrer que l'on a :

$$\omega_f(t_1 + t_2) \leqslant \omega_f(t_1) + \omega_f(t_2).$$

c. Calculer la fonction ω_q correspondant à la fonction $q : t \longmapsto \sqrt{t}$ sur $[0, 1]$.

2° Soit $t \in [0, 1]$ et $\lambda \geqslant 0$ tel que $\lambda t \leqslant 1$. Montrer que l'on a :

$$\omega_f(\lambda t) \leqslant (\lambda + 1) \cdot \omega_f(t)$$

3° Montrer que toute fonction ω sur $[0, 1]$ vérifiant les propriétés 1° *a* et 1° *b* est de la forme ω_f où f est une fonction de $C[0, 1]$.

4° *a*. Montrer que $\omega_f(t) > 0$ pour $t > 0$ ou bien que ω_f est identiquement nulle.

b. Soit ω une fonction sur $[0, 1]$ vérifiant 1° *a* et 1° *b* non identiquement nulle. On désigne par C_ω l'ensemble des fonctions f de $C[0, 1]$ pour lesquelles il existe une constante M avec :

$$\forall (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant M\, \omega(|x - y|)$$

et l'on note $\|f\|_\omega = \sup_{x \neq y} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{\omega(|x - y|)} + \|f\|_\infty$.

Montrer que C_ω est un espace vectoriel réel pour les lois usuelles, que l'application $f \longmapsto \|f\|_\omega$ est une norme sur cet espace et que, muni de cette norme, C_ω est un espace normé complet.

II

Dans cette partie l'intervalle $[a, b]$ est l'intervalle $[0, 1]$ et les fonctions e_n et β_x sont celles définies dans les notations.

Si $f, g \in C[0, 1]$, on notera $f \geqslant g$ la relation $\forall t \in [0, 1], f(t) \geqslant g(t)$. En particulier $f \geqslant 0$ signifie $\forall t \in [0, 1], f(t) \geqslant 0$.

Une application linéaire L de $C[0, 1]$ dans $C[0, 1]$ est dite positive si $f \geqslant 0$ implique $L(f) \geqslant 0$.

. . . / . . .

E.N.S. FONTENAY & SAINT-CLOUD 1983

On considère dans cette partie une telle application linéaire positive L.

1° Montrer $\forall f \in C[0,1]$, $|L(f)| \leqslant L(|f|)$

et $\forall f \in C[0,1]$, $\forall g \in C[0,1]$, $L(fg)^2 \leqslant L(f^2).L(g^2)$.

2° Soit $f \in C[0,1]$ et $x \in [0,1]$. On pose $\alpha(x) = [L(\beta_x^2)(x)]^{\frac{1}{2}}$ et on suppose $\alpha(x) < 1$.

a. Pour δ réel vérifiant $\alpha(x) < \delta < 1$, montrer que l'on a

$$\forall t \in [0,1] , \quad |f(t) - f(x)| \leqslant \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) . \omega_f(\delta)$$

b. On remarquera que $|f - f(x)e_0|$ désigne la fonction $t \longmapsto |f(t) - f(x)|$.

Montrer que :

$$L(|f - f(x)e_0|)(x) \leqslant (L(e_0)(x) + L(e_0)(x)^{\frac{1}{2}}) . \omega_f(\alpha(x))$$

c. Montrer que :

$$|L(f)(x) - f(x)| \leqslant |f(x)| . |L(e_0)(x) - 1| + (L(e_0)(x) + L(e_0)(x)^{\frac{1}{2}}) . \omega_f(\alpha(x))$$

3° Soit L_n, $n \geqslant 1$, une suite d'applications linéaires positives de $C[0,1]$ dans $C[0,1]$. On pose $\alpha_n(x) = [L_n(\beta_x^2)(x)]^{\frac{1}{2}}$ pour $x \in [0,1]$.

Pour les trois valeurs 0, 1 et 2 de i, on suppose que la suite des fonctions $L_n(e_i)$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers e_i lorsque n tend vers $+\infty$.

a. Montrer que la suite des fonctions α_n converge uniformément sur $[0,1]$ vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Montrer que pour toute f de $C[0,1]$, la suite des fonctions $L_n(f)$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$ lorsque n tend vers $+\infty$.

III

Dans cette partie l'intervalle $[a, b]$ est l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ et les fonctions e_n et β_x sont celles définies dans les notations.

On pose :

$$c_n = \int_{-1}^{+1} (1 - t^2)^n \, dt, \; n \in \mathbb{N} \quad \text{et pour} \quad f \in C\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right],$$

$$P_n(f)(x) = \frac{1}{c_n} \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(t) . [1 - (t-x)^2]^n \, dt.$$

1° Établir une relation de récurrence entre les c_n et montrer que l'on a :

$$c_n = \frac{2^{2n+1} \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}$$

2° Soit $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right[$. Montrer que $P_n(f)(x)$ converge vers $f(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et que la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé contenu dans $\left]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right[$.

3° Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $P_n(f)\left(\frac{1}{2}\right)$.

4° On note a_n le nombre $\frac{1}{c_n} \cdot \int_{-1}^{+1} t^2 (1 - t^2)^n \, dt$. Calculer a_n.

a. Pour $\delta \in \left]0, +\frac{1}{2}\right[$, montrer que :

$$\forall x \in [-\delta, +\delta], \quad 1 - P_n(e_0)(x) \leqslant \left(\frac{1}{2} - \delta\right)^{-2} . a_n$$

b. Montrer que :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right[, \qquad P_n(\beta_x^2)(x) \leqslant a_n$$